TP 4 : Schéma itératifs pour les vecteurs propres et racines

1 Méthode par puissance pour calculer les vecteurs propres

La méthode par puissance est une méthode simple pour calculer le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre. Pour une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times q}$, le schéma itératif est le suivant,

$$v_{i+1} = \frac{(\mathbf{A} - \mu \mathbf{I})^{-1} v_i}{\|(\mathbf{A} - \mu \mathbf{I})^{-1} v_i\|} \ .$$

avec μ un pas de descente (doit être inférieur à la valeur propre associée au vecteur) et $\mathbf{I}$ la matrice identité.

Je te propose de demander aux étudiants de faire une première implémentassions de ce schéma avec ces défauts. Pour faire ludique, on peut ensuite comparer les résultats avec la méthode du dernier TP pour les matrices 2×2.

Cependant le problème est que nous avons une matrice à inverser et un pas à gérer. Donc je propose un autre schéma sans pas à gérer. Pour simplifier, je vais aussi considérer une matrice carrée (par exemple $\mathbf{A}^t\mathbf{A}$). Le nouveau schéma est le suivant, avec comme initialisation v_0 aléatoire avec $\|v_0\| = 1$ et $\lambda_0 = v_0^t \mathbf{A} v_0$,

$$\begin{aligned} v_{i+\frac{1}{2}} &= \lambda_i \mathbf{A} v_i \ , \\ v_{i+1} &= v_{i+\frac{1}{2}} \Big/ \left\| v_{i+\frac{1}{2}} \right\| \ , \\ \lambda_{i+1} &= \frac{v_{i+1}^t \mathbf{A} v_{i+1}}{v_{i+1}^t v_{i+1}} \ . \end{aligned}$$

La convergence est atteinte lorsque $\frac{|\lambda_{i+1} - \lambda_i|}{\lambda_i} < \varepsilon$ (dont la valeur est arbitraire), v_i converge vers le vecteur propre et λ_i la valeur propre associée.

Une fois ce schéma implémenté, il suffit de considérer $\mathbf{A}\mathbf{A}^t$ pour avoir les autres vecteurs propres. Ensuite pour avoir, les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}$ il suffit de reprendre le rapport $\frac{v^t \mathbf{A} v}{v^t v}$.

2 Méthode de Newton pour les racines d'un polynôme

Cette partie sera en lien avec le TD. L'idée de cette partie de TP est calculer toutes les racines d'un polynôme. Pour une fonction dérivable f, la méthode de Newton cherche à résoudre $f(x) = 0$ avec le schéma itératif suivant,

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \ .$$

Cette méthode est assez simple à mettre en place. Pour ceux qui vont vite, il faut leur demander d'écrire des fonctions de gestion (évaluation, dérivation...) d'un polynôme avec une liste pour stocker les coefficients.