TP 5 : Résolution de systèmes d'équations linéaires

1 Méthode du gradient conjugué

Pour commencer nous allons uniquement considérer des matrices carrées $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ symétriques définies positives (donc pas forcément inversible).

Le problème que nous cherchons à résoudre est, pour $b \in \mathbb{R}$

$$\text{trouver } x \in \mathbb{R}^p \text{ tel que } \mathbf{A}x = b. \tag{1}$$

Nous pouvons faire le lien avec le TP de la semaine dernière où l'on doit faire une inversion matricielle. Ici nous cherchons le vecteur résultant de l'application de la matrice inverse sans faire d'inversion pour autant.

Voici la méthode du gradient conjugué capable de résoudre (1) en un nombre d'itérations finis ! Cela reste un algorithme itératif dont la boucle principale est la suivante,

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{r_k^t r_k}{p_k^t \mathbf{A} p_k} \ , \\
x_{k+1} &= x_k + \alpha_k p_k \ , \\
r_{k+1} &= r_k - \alpha_k \mathbf{A} p_k \ , \\
\beta_k &= \frac{r_{k+1}^t r_{k+1}}{r_k^t r_k} \ , \\
p_{k+1} &= r_{k+1} + \beta_k p_k \ .
\end{aligned}$$

Comme initialisation, il faut prendre $x_0 = 0$ et $p_0 = r_0 = b$.

Pour tester l'algorithme, on peut remplacer l'inversion matricielle par cette méthode dans les algorithmes de calcul des vecteurs propres. Comparer les résultats.

2 Descente de gradient

Comparer la méthode précédente avec la méthode de gradient vu en cours et en TD.